

### 37 佩爾方程式

設正整數  $x, y$  滿足  $x^2 - 2y^2 = 1$ 。證明：可以找到一個正整數  $n$  使得

$$x + y\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n.$$

【證明】圓錐曲線  $x^2 - 2y^2 = 1$  為雙曲線，我們容易算得離原點最近的兩個正整數解為  $(3, 2), (17, 12)$  (註： $17 + 12\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^2$ )；而且若正整數  $x, y$  滿足

$$x + y\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n,$$

則

$$x^2 - 2y^2 = (3 + 2\sqrt{2})^n (3 - 2\sqrt{2})^n = 1.$$

現在使用反證法，假設  $x, y$  為滿足  $x^2 - 2y^2 = 1$ ，不能表為

$$x + y\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$$

的形式且離原點最近的正整數解，並令整數數對  $(x_0, y_0)$  滿足

$$x_0 + y_0\sqrt{2} = \frac{x + y\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = (3x - 4y) + (3y - 2x)\sqrt{2}.$$

我們有

$$\begin{cases} x_0^2 - 2y_0^2 = 1 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \\ x > 3, y > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3x - 4y = \frac{9x^2 - 16y^2}{3x + 4y} = \frac{x^2 + 8}{3x + 4y} > 0 \\ y_0 = 3y - 2x = \frac{9y^2 - 4x^2}{3y + 2x} = \frac{y^2 - 4}{3y + 2x} > 0 \\ x - x_0 = -2x + 4y = 2\left(\frac{x^2 - 2}{2y + x}\right) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < x_0 < x, \\ 0 < y_0, \\ x_0^2 - 2y_0^2 = 1, \\ x_0 + y_0\sqrt{2} \text{ 不能表為 } (3 + 2\sqrt{2})^n \text{ 的形式。} \end{cases}$$

這與假設“ $x, y$  為滿足  $x^2 - 2y^2 = 1$ ，不能表為

$$x + y\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$$

的形式且離原點最近的正整數解”矛盾。

事實上，這個證明方法稱為費馬無限遞降法。類似此種的方程式

$$x^2 - dy^2 = 1, \quad (d \text{ 是個非完全平方的正整數})$$

皆稱為佩爾方程式。佩爾方程式的正整數解通解都是先找一組最接近原點的正整數解，然後證明此最接近原點的正整數解可以生成所有其它的正整數解。歷史上最早研究佩爾方程式的人是印度數學家婆羅摩笈多（598-665 以後），而諷刺的是佩爾從未研究過佩爾方程式。

習題 37.1 試求方程式

$$x^2 - 8y^2 = 1$$

正整數解的通解。

習題 37.2 試求方程式

$$x^2 - 10y^2 = 1$$

正整數解的通解。

習題 37.3 試求方程式

$$x^2 - 11y^2 = 1$$

正整數解的通解。

習題 37.4 試求方程式

$$x^2 - 13y^2 = 1$$

正整數解的通解。

習題 37.5 證明：可以找到無窮多個三邊長都是正整數且兩股差為 1 的直角三角形。

### 動手玩數學

有三所學校，每校都有  $N$  個學生。如果每一學校的每個學生至少認識其它兩個學校的  $N+1$  個學生（這裡的認識是指互相認識），則是否一定有三個學生彼此互相認識？

### 挑戰題

數列  $\langle f_n \rangle$  定義如下：

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = 3f_{n+1} - f_n (n \geq 0).$$

證明：雙曲線

$$x^2 - 3xy + y^2 = 1$$

滿足  $x > y$  的正整數解必為

$$(x, y) = (f_{n+1}, f_n), n \geq 1$$

的形式。

### abc 猜想

如果一個正整數  $N$  的因數分解如下：

$$N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_l^{n_l},$$

其中  $p_1, p_2, \dots, p_l$  為相異的質數； $n_1, n_2, \dots, n_l$  為正整數，則我們定義

$$F(N) = p_1 p_2 \cdots p_l.$$

有名的“abc 猜想”是說：是否存在一個正實數  $\kappa$  使得對任意兩兩互質且滿足  $a + b = c, abc \neq 0$  的整數  $a, b, c$  恆有

$$\max\{|a|, |b|, |c|\} \leq \kappa F(|a \cdot b \cdot c|).$$

多數數學家傾向於認為這個猜想是正確的。